ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 3 MAI 1915.

PRÉSIDENCE DE M. Ed. PERRIER.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

GÉOMÉTRIE. — *Représentation sur un plan de la surface du quatrième ordre à conique double.* Note [1] de M. **Gaston Darboux**.

Dans une Note précédente (p. 531), nous avons obtenu d'une manière directe la représentation sur un plan simple de la surface générale du quatrième ordre à conique double. Nous allons confirmer et retrouver les résultats obtenus en suivant une méthode qu'on peut considérer comme l'inverse de la première.

Pour cela, nous allons considérer directement les cubiques planes passant par cinq points, que nous supposerons distincts. Nous supposerons qu'on ait choisi les axes de telle manière que la conique déterminée par ces cinq points ait pour équation, en coordonnées homogènes,

$$y^2 - xz = 0. \tag{1}$$

On sait qu'alors un point quelconque de la conique peut être défini par les équations

$$x = \lambda^2 z, \qquad y = \lambda z; \tag{2}$$

soit

$$f(\lambda) = a\lambda^5 + b\lambda^4 + c\lambda^3 + c'\lambda^2 + b'\lambda + a' \tag{3}$$

l'équation qui fait connaître les valeurs de λ relatives aux cinq points qui doivent être communs à toutes nos cubiques. Un calcul facile montre alors

(1) Séance du 26 avril 1915.

qu'on obtient *toutes* ces cubiques en égalant à zéro une combinaison linéaire quelconque des cinq quantités u_i définies par les formules suivantes

$$(4)\quad \begin{cases} u_1 = x(y^2 - xz), \qquad u_2 = y(y^2 - xz), \qquad u_3 = z(y^2 - xz), \\ u_4 = ax^2y + bx^2z + cxyz + c'xz^2 + b'yz^2 + a'z^3, \\ u_5 = ax^3 + bx^2y + cx^2z + c'xyz + b'xz^2 + a'yz^2, \end{cases}$$

en sorte que l'équation générale de toutes ces cubiques sera

$$(5)\qquad \sum_1^5 A_i u_i = 0,$$

les A_i désignant cinq constantes arbitraires.

Il est facile de voir qu'il y a deux relations quadratiques entre les u_i. On a, en effet,

$$xu_4 - yu_5 = (bx^2 + c'xz + a'z^2)(xz - y^2),$$
$$yu_4 - zu_5 = (ax^2 + c\,xz + b'z^2)(y^2 - xz),$$

d'où, en multipliant par $y^2 - xz$,

$$u_1u_4 - u_2u_5 = -bu_1^2 - c'u_1u_3 - a'u_3^2,$$
$$u_2u_4 - u_3u_5 = au_1^2 + c\,u_1u_3 + b'u_3^2.$$

Cela donne les deux relations quadratiques

$$(6)\quad \begin{cases} bu_1^2 + c'u_1u_3 + a'u_3^2 + u_1u_4 - u_2u_5 = 0, \\ au_1^2 + c\,u_1u_3 + b'u_3^2 - u_2u_4 + u_3u_5 = 0. \end{cases}$$

Si l'on veut réduire les premiers membres, qui sont des formes quadratiques homogènes, à des sommes composées des mêmes carrés, il faudra, comme on sait, annuler le discriminant de la forme

$$(a\lambda + b)u_1^2 + (c\lambda + c')u_1u_3 + (b'\lambda + a')u_3^2 + u_1u_4 - \lambda u_2u_4 + \lambda u_3u_5 - u_2u_5.$$

En égalant à zéro les dérivées, il viendra

$$(7)\quad \begin{cases} 2(a\lambda + b)u_1 + (c\lambda + c')u_3 + u_4 = 0, \\ -\lambda u_4 - u_5 = 0, \\ (c\lambda + c')u_1 + 2(b'\lambda + a')u_3 + \lambda u_5 = 0, \\ u_1 - \lambda u_2 = 0, \\ \lambda u_3 - u_2 = 0, \end{cases}$$

et l'élimination des u_i nous conduira précisément à l'équation (3)

$$f(\lambda) = 0$$

dont dépend la détermination des cinq points. Comme cette équation a ses racines distinctes, on sait qu'on pourra toujours choisir des fonctions linéaires

$$x_i = \sum_k a_{ik} u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 5)$$

de telle manière que les deux relations (6) prennent les formes

$$(8) \quad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0, \\ a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 + a_5 x_5^2 = 0, \end{cases}$$

qui ne contiennent plus que les carrés. Remarquons même que toutes ces opérations pourront se faire rationnellement si l'on connaît les racines de l'équation du cinquième degré (3).

Il faut encore signaler que la réduction à la forme (8) des deux relations quadratiques homogènes entre les u_i *n'est pas unique*. Elle subsisterait évidemment si l'on substituait aux x les quantités $\frac{x_i}{\sqrt{a_i - \lambda}}$, où λ est une arbitraire quelconque. Nous aurons à faire usage de cette seconde remarque.

Supposons donc obtenues les fonctions x_i et construisons la surface lieu du point dont les coordonnées homogènes X, Y, Z, T s'expriment par les formules

$$(9) \quad \begin{cases} X = \sum_i a_{1i} x_i, \\ Y = \sum_i a_{2i} x_i, \\ Z = \sum_i a_{3i} x_i, \\ T = \sum_i a_{4i} x_i, \end{cases}$$

les constantes a_{hi} étant assujetties à l'unique condition que les fonctions X, Y, Z, T soient linéairement indépendantes.

Si nous introduisons, pour la symétrie, une auxiliaire Ω définie par la relation

$$(10) \qquad \Omega = \Sigma \alpha_i x_i,$$

où les nouvelles constantes α_i sont choisies de telle manière que X, Y, Z, T, Ω forment un ensemble de cinq fonctions linéairement indépendantes,

on pourra résoudre les équations (9) et (10) par rapport aux x_i, ce qui donnera des expressions de la forme

$$(11) \qquad x_i = X_i + h_i \Omega,$$

où les X_i sont des fonctions homogènes de X, Y, Z, T et les h_i des constantes. La substitution de ces expressions dans l'équation (10) donne les deux relations

$$(12) \qquad \Sigma \alpha_i X_i = 0,$$
$$(13) \qquad \Sigma \alpha_i h_i = 1,$$

auxquelles doivent satisfaire respectivement les fonctions X_i et les constantes h_i. Mais, de plus, si l'on use de la faculté sur laquelle nous avons appelé plus haut l'attention et si l'on remplace les x_i par $\frac{x_i}{\sqrt{a_i - \lambda}}$, on verra qu'on peut toujours disposer de l'arbitraire λ de manière à imposer aux h_i la relation

$$(14) \qquad \sum_i h_i^2 = 0,$$

que nous supposerons vérifiée dans la suite.

Si maintenant nous portons les valeurs (11) des x_i dans les deux relations (8) et si nous posons

$$(15) \quad \Sigma X_i^2 = \Phi, \quad \Sigma h_i X_i = P, \quad \Sigma a_i X_i^2 = \Phi_1, \quad \Sigma a_i h_i X_i = P_1, \quad \Sigma a_i h_i^2 = 4k,$$

Φ, Φ_1 seront du second degré, P et P_1 seront du premier et k sera une constante. Les deux équations (8) deviendront

$$(16) \qquad \begin{cases} \Phi + 2P\Omega = 0, \\ \Phi_1 + 2P_1\Omega + 4k\Omega^2 = 0. \end{cases}$$

L'élimination de Ω entre ces deux relations conduit à l'équation de la surface

$$(17) \qquad \Phi_1 P^2 - \Phi P P_1 + k\Phi^2 = 0.$$

On voit qu'on obtient une surface du quatrième degré admettant pour courbe double la conique représentée par les deux équations

$$(18) \qquad \Phi = \Sigma X_i^2 = 0, \qquad P = \Sigma h_i X_i = 0.$$

Il est très aisé d'obtenir la représentation plane de cette courbe double.

Car si, dans les équations précédentes, on remplace les X_i par leurs valeurs tirées des formules (11) en tenant compte de la condition (14), les deux équations (18) se réduisent à l'unique relation suivante :

$$\Sigma h_i x_i = 0. \tag{19}$$

C'est *l'équation de la courbe du troisième degré qui sert de représentation plane à la conique double de la surface.*

En terminant, nous pouvons remarquer que, dans le plan, la courbe la plus générale passant par les cinq points est représentée par l'équation

$$\Sigma \beta_i x_i = 0 \tag{20}$$

et sert de représentation à la courbe de la surface représentée par l'équation

$$\Sigma \beta_i X_i + \Omega \Sigma \beta_i h_i = 0$$

ou

$$\Sigma \beta_i X_i - \frac{\Phi}{2P} \Sigma \beta_i h_i = 0. \tag{21}$$

L'équation générale (20) donne donc la représentation sur le plan de l'intersection de la surface du quatrième ordre par la quadrique la plus générale qui contient la conique double de la surface.

Tous ces résultats ne sont, pour ainsi dire, que la traduction par l'homographie de ceux que nous avait fournis notre première solution. Les cinq quadriques définies par les équations

$$x_i = X_i - \frac{h_i \Phi}{2P} = 0 \tag{22}$$

remplaçant les cinq sphères orthogonales qui jouent un rôle si essentiel dans la théorie des cyclides.

ASTRONOMIE. — *Comparaison de la* scintillation *et des* ondulations *instrumentales des images célestes sous diverses influences* (1). Note de M. G. **Bigourdan.**

Aurores boréales; perturbations magnétiques. — Montigny, confirmant les observations d'Ussher, de Forbes, ..., a trouvé que la scintillation des

(1) Voir page 536 de ce volume.

étoiles est bien plus grande quand une aurore boréale est visible ([1]) ou quand il se produit une perturbation magnétique ([2]).

Pour juger s'il en est de même des ondulations instrumentales, je ne connais que les observations d'Ussher qui, à Dublin, avait « toujours remarqué que les aurores boréales rendent les étoiles singulièrement ondulantes dans le télescope ».

Dépressions barométriques. — Le passage de ces dépressions, à une distance plus ou moins grande, se répercute sur beaucoup de phénomènes météorologiques : pression, température, pluie, vent, ...

Dufour ([3]) et surtout Montigny ([4]), qui se plaçaient l'un et l'autre au point de vue météorologique, ont cherché comment varient la scintillation, les couleurs ([5]) qu'elle met en évidence, ... avec ces divers phénomènes, avec les saisons, etc.

([1]) *Notice sur la scintillation et sur son intensité pendant l'aurore boréale...*, *le* 5 *avril* 1870 (*Brux. Bull.*, t. XXIX_2, 1870, p. 455-469 [W]).

De l'influence des aurores boréales..., *du* 5 *avril* 1870 *et du* 1er *juin* 1878 (*Brux. Bull.*, t. XLVI_2, 1878, p. 17-42 [X]).

Note sur l'intensité de la scintillation pendant les aurores boréales (*Brux. Bull.*, t. I_3, 1881, p. 231-250 [Y]).

Notice sur une particularité de l'aurore boréale du 2 *octobre* 1882 (*Brux. Bull.*, t. IV_3, 1882, p. 303-322 [Z]).

Sur l'accroissement d'intensité de la scintillation des étoiles pendant les aurores boréales (*Comptes rendus*, t. 96, 1883, p. 572-575 [AA].

([2]) *Influence des perturbations magnétiques sur la scintillation des étoiles* (*Brux. Bull.*, t. VI_3, 1883, p. 426-457 [AB]. Voir aussi [Z]).

([3]) *La scintillation des étoiles et la prévision du temps* (*Bull. Soc. astr. France*, 1894, p. 162-165 [AC]).

([4]) *Recherches sur les variations d'intensité de la scintillation des étoiles selon l'état de l'atmosphère, particulièrement aux approches et sous l'influence de la pluie.* Ire et IIe Parties (*Brux. Bull.*, t. XLII_2, 1876, p. 255-294 [AD], et t. XLVI_2, 1878, p. 598-635 [AE]).

Influence des bourrasques sur la scintillation des étoiles (*Brux. Bull.*, t. XIV_3, 1887 [AF]).

La scintillation des étoiles dans ses rapports avec les phénomènes météorologiques (*Ciel et Terre*, t. VI [1885-1886], p. 198-208 [AG]).

([5]) *Sur la prédominance de la couleur bleue dans les observations de scintillation aux approches et sous l'influence de la pluie* (*Brux. Bull.*, t. XLVII_2, 1879, p. 755-766 [AH]).

De l'influence de l'état de l'atmosphère sur l'apparition des couleurs... (*Brux. Bull.*, t. VII_3, 1884 [AJ]).

De l'accord entre les indications des couleurs... (*Brux. Bull.*, t. IX_3, 1885 [AK]).

Influence de la couleur bleue de l'eau contenue dans l'atmosphère sur la scintil-

Dufour, à Morges, trouve que les scintillations faibles ou très faibles présagent le mauvais temps. Pour Montigny, à Bruxelles, la scintillation augmente en même temps que le vent, la pression barométrique et l'humidité relative, tandis qu'elle diminue quand la température s'élève. En somme, les résultats de ces deux observateurs sont assez contradictoires. Cela tiendrait-il à des influences locales? En réalité, il semble bien que des comparaisons aussi minutieuses que celles de Montigny doivent être illusoires; car, à défaut de vues théoriques, il faudrait des observations plus nombreuses, poursuivies pendant beaucoup plus de temps, pour déterminer l'effet individuel de chacune de ces causes, enchevêtrées en quelque sorte les unes avec les autres. Mais, visiblement, les résultats de Montigny concordent avec une loi analogue à celle que nous avons énoncée pour les ondulations, savoir, leur relation avec le régime cyclonique ou anticyclonique.

Cela est particulièrement manifeste pour ce qui concerne la direction du vent; car Montigny trouve qu'en moyenne la scintillation est plus grande par les vents soufflant de la région ouest (régime cyclonique), tandis qu'elle est plus faible pour ceux qui soufflent des régions nord et est (régime anticyclonique). En outre, on s'explique pourquoi la scintillation est moindre en été qu'en hiver, cette dernière saison étant beaucoup plus sous l'influence du régime cyclonique.

Voisinage des nuages. — Quand une étoile se trouve au voisinage des nuages, la scintillation, dit Dufour, est toujours considérablement augmentée.

Dans les mêmes conditions, les ondulations sont augmentées aussi, comme l'ont remarqué divers observateurs d'étoiles doubles (1).

Influence de l'azimut. — Scheiner disait déjà que les étoiles scintillent d'autant plus qu'elles sont plus boréales; mais Arago jugeait cela impossible. Cependant les observations de Montigny (2), poursuivies pendant

---

lation aux approches de la pluie (*Brux. Bull.*, t. V_3, 1893 [AL]); — *Ibid.*, t. VII_3, 1884 [AM]; — *Ibid.*, t. IX_3, 1884 [AN].

De l'accord entre les indications des couleurs... (*Ciel et Terre*, t. VI, 1885-1886, p. 337-345 [AO]).

(1) T. J. J. SEE, *Atmospheric Conditions essential to the best telescopic Definition* (*Astr. Nachr.*, t. 144, 1897, n° 3438, col. 83 [AQ]).

(2) *De l'intensité de la scintillation des étoiles dans les différentes parties du ciel* (*Brux. Bull.*, t. XVI_3, 1888, p. 160-170 [AP]).

près de 1000 soirées, de 1880 à 1888, et résumées dans le Tableau suivant, appuient l'opinion de Scheiner. Et les observations spectrales de Respighi font comprendre comment cela est possible.

Intensité de la scintillation suivant l'orientation.

Directions :	Est.	Sud.	Ouest.	Nord.	Moy.	Nombre des jours d'obs.
Moyenne par temps sec	345	330	325	386	346	327
» générale	475	450	445	535	476	986
» sous l'influence des dépressions	745	705	680	850	745	177

On voit que la différence, faible par temps sec, est notable sous l'influence des dépressions; et toujours la scintillation est plus grande dans la direction nord.

Pour les ondulations, les observations manquent.

Influence du crépuscule. — Sans donner de détail, Dufour dit que la scintillation est en général plus forte le soir au crépuscule, ou le matin à l'aurore; et Montigny ajoute que ses observations sont d'accord avec cette remarque : la scintillation aurait donc une variation diurne avec deux maxima, l'un dans le crépuscule et l'autre dans l'aurore.

D'autre part, les ondulations instrumentales ont au contraire un minima vers le crépuscule du soir: ici il y a donc une opposition nette et complète.

Malgré cette dernière opposition, qu'il importerait de mettre hors de doute par des observations plus nombreuses, faites dans un assez grand nombre de points, on peut conclure que les deux phénomènes comparés, scintillation et ondulations, présentent un véritable parallélisme.

On voit combien de questions restent à élucider dans cette comparaison de la scintillation aux ondulations, parce que les observations manquent. Aussi croit-on pouvoir recommander aux observateurs, et plus particulièrement à ceux qui mesurent des étoiles doubles, de noter aussi la valeur de la scintillation, ne fût-ce qu'à l'œil nu : les résultats déjà obtenus ainsi montrent la valeur de telles observations.

Peut-être aussi la classification des divers points de la surface de la Terre, suivant que la scintillation est nulle, faible, ..., très forte, apporterait des renseignements utiles.

Remarques. — Dans une Note précédente (p. 416 de ce Volume), j'ai indiqué divers caractères que présentent les images agitées des étoiles.

Pour les étoiles doubles, le P. Secchi (1), observant à Rome avec une lunette de $0^m,217$ d'ouverture, distinguait six aspects différents, suivant l'état des images.

1° *Atmosphère parfaite.* — L'image est formée de deux disques très petits, nettement circonscrits et définis, sans franges ni rayons. Cet état est très rare même à Rome.

2° *Atmosphère très bonne.* — Les disques sont encore nets et précis, mais on les voit déjà entourés de rayons très fins et déliés.

3° *Atmosphère bonne.* — Elle est assez commune lorsque le ciel est serein; les rayons très prononcés qui entourent les images ne sont pas assez longs pour amener un commencement de fusion des composantes.

4° *Atmosphère passable.* — Déjà l'image de l'étoile est entourée d'une sorte de halo ou anneau coloré, confus et irisé. Cet état précède la formation des nuages.

5° *Atmosphère mauvaise.* — L'image n'est plus unique : elle ressemble à une fleur dont les images secondaires oscillantes représentent les pétioles; elle est constamment en mouvement. Les images tremblent et sautillent continuellement.

6° *Atmosphère très mauvaise.* — Le diamètre des grandes étoiles atteint jusqu'à 8″; la lumière diffuse forme une auréole de plus de 20″. C'est dans tout le champ comme un halo mal défini....

Le P. Secchi attribue une grande influence à l'amplitude de la variation diurne de la température au point d'observation et croit, avec Piazzi (2), que les images sont moins agitées dans les pays septentrionaux, comme l'Angleterre, qu'à Palerme; et cela, dit-il (3), serait confirmé par les grandes irrégularités de la réfraction trouvées par Biot, observant en Italie.

Le P. Secchi dit aussi qu'à Rome on n'a de belles images que lorsque le temps est depuis plusieurs jours fixé au beau, tandis que lorsque souffle la *tramontana* on a toujours des images mal terminées, même quand elles sont calmes.

(1) *Annuaire du Cosmos*, année 1859, 2e Partie.

(2) W. H. Smyth, *A Cycle of celestial Objects*, t. 2, 1844, p. 128, et *Speculum Hartwellianum*, 1860, p. 46.

(3) *Descrizione del Nuovo Osservatorio del Collegio Romano D. C. G. D. e Memorio sui lavori eseguiti dal* 1852 *a tutto Aprile* 1856, p. 30, 139.

Enfin, pour M. See, le voisinage d'un océan serait, avec les influences cycloniques, une cause de mauvaises images.

On a vu, page 417, qu'à Dorpat, Washington, Milan, Paris, etc., le moment des images calmes tombe au voisinage du coucher du Soleil et ne dure pas bien longtemps. Mais certains sites sont plus favorisés; ainsi Piazzi Smyth ([1]), à Madère, a eu parfois de belles images pendant toute la nuit, à la station de Guajara (8843 pieds d'altitude). Et à la station d'Altavista (10707 pieds d'altitude), il avait de belles images particulièrement le matin. Toutefois ses observations n'ont pas été assez prolongées pour établir si ce régime est régulier.

MÉCANIQUE. — *Sur la trajectoire des projectiles lancés par les avions ou dirigeables.* Note de M. DE SPARRE.

Cette trajectoire est celle d'un projectile dont la vitesse initiale horizontale est au plus égale à 60^{m}, car 60^{m} à la seconde correspondent à 216^{km} à l'heure, et dont la vitesse finale ne saurait dépasser environ 220^{m}. En effet, dans le vide, une hauteur de chute de 2500^{m} produit une vitesse de $221^{m},5$.

Or, si l'on se rapporte aux Tables de Siacci, on reconnaît que dans ces limites on peut, avec une approximation très suffisante, supposer la résistance proportionnelle au carré de la vitesse ([2]).

Nous supposons donc deux axes rectangulaires : Ox horizontal et dirigé suivant la vitesse initiale, Oy vertical et dirigé vers le bas; nous désignerons de plus par θ l'inclinaison de la tangente, par v la vitesse du projectile, par v_0 la vitesse initiale et par u la composante horizontale de la vitesse. Nous supposons de plus la résistance de l'air égale à Kv^2. Si alors p est le poids du projectile, on a pour l'équation différentielle de l'hodo-

---

([1]) *Report on the Teneriffe Astronomical Experiment of* 1856 (*Phil. Trans.* for 1858, part II).

([2]) D'après Siacci, la résistance de l'air étant représentée par

$$r = \frac{\delta i}{c} v^2 K(v),$$

où δ, i, c sont des facteurs constants pour un projectile donné, on a $K(v) = 121$ pour $v = 29^{m}$ et $K(v) = 123$ pour $v = 211^{m}$, de sorte qu'on peut, entre ces limites de 29^{m} et de 211^{m}, prendre avec une exactitude très suffisante $K(v) = 122$ et, par suite,

$$r = \frac{\delta i}{c} 122 v^2.$$

graphe

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{\mathrm{K}u^3}{p\cos^3\theta},$$

et en posant

$$\chi^2 = \frac{p}{\mathrm{K}}, \qquad \zeta(\theta) = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\theta\operatorname{séc}\theta + \frac{1}{2}\mathcal{L}\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right);$$

on aura, en remarquant que $\theta_0 = 0$ et $u_0 = v_0$,

(1) $$u^2 = \frac{v_0^2}{1+\dfrac{2v_0^2}{\chi^2}\zeta(\theta)}.$$

On a ensuite, pour déterminer x et y,

(2) $$x = \int_0^\theta \frac{u^2}{g}\frac{d\theta}{\cos^2\theta},$$

(3) $$y = \int_0^\theta \frac{u^2}{g}\frac{\operatorname{tang}\theta\, d\theta}{\cos^2\theta}.$$

Nous partagerons alors la trajectoire en deux arcs : un premier où θ varie de $0°$ à $45°$ et un second où θ varie de $45°$ à $90°$.

Considérons d'abord le premier arc où

$$0 < \theta < 45°.$$

Entre ces limites de θ, si l'on considère l'expression

$$z = \zeta(\theta) - \operatorname{tang}\theta(1+0,134\operatorname{tang}\theta),$$

on voit qu'on a

$$|z| \leqq 0,014;$$

on peut donc, avec une approximation très suffisante, prendre entre ces limites, dans (1),

$$\zeta(\theta) = \operatorname{tang}\theta(1+0,134\operatorname{tang}\theta),$$

et si alors on pose

$$\alpha = \frac{2v_0^2}{\chi^2}, \qquad \beta = 0,134\alpha,$$

on aura

$$x = \frac{v_0^2}{g\beta}\int_0^\theta \frac{d\operatorname{tang}\theta}{\left(\operatorname{tang}\theta+\dfrac{\alpha}{2\beta}\right)^2+\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{\alpha^2}{4\beta^2}},$$

$$y = \frac{v_0^2}{2g\beta}\int_0^\theta \frac{(\alpha+2\beta\operatorname{tang}\theta)\,d\operatorname{tang}\theta}{1+\alpha\operatorname{tang}\theta+\beta\operatorname{tang}^2\theta} - \frac{\alpha}{2\beta}x.$$

Cette seconde formule donne

$$y = \frac{v_0^2}{2g\beta} \mathcal{L}(1 + \alpha \operatorname{tang}\theta + \beta \operatorname{tang}^2\theta) - \frac{\alpha}{2\beta} x. \tag{4}$$

Quant à la valeur de x, nous devrons distinguer deux cas :

1° Si

$$\alpha^2 > 4\beta,$$

en posant

$$\lambda^2 = \frac{\alpha^2 - 4\beta}{4\beta^2}, \qquad \text{d'où} \qquad 2\beta\lambda = \sqrt{\alpha^2 - 4\beta},$$

on aura

$$x = \frac{v_0^2}{2g\beta\lambda} \mathcal{L} \frac{(\alpha + 2\beta\lambda) \operatorname{tang}\theta + 2}{(\alpha - 2\beta\lambda) \operatorname{tang}\theta + 2}. \tag{5}$$

Mais en général $2\beta\lambda \operatorname{tang}\theta$, où nous supposons $\theta \leq 45°$, sera petit par rapport à $2 + \alpha \operatorname{tang}\theta$, de sorte qu'en développant suivant les puissances croissantes de

$$\frac{2\beta\lambda \operatorname{tang}\theta}{2 + \alpha \operatorname{tang}\theta},$$

nous aurons, en ne gardant que les deux premiers termes et tenant compte de la valeur de λ,

$$x = \frac{2v_0^2 \operatorname{tang}\theta}{g(2 + \alpha \operatorname{tang}\theta)} \left[1 + \frac{(\alpha^2 - 4\beta) \operatorname{tang}^2\theta}{3(2 + \alpha \operatorname{tang}\theta)^2} \right]. \tag{6}$$

2° Si

$$\alpha^2 < 4\beta,$$

en posant

$$\lambda_1^2 = \frac{4\beta - \alpha^2}{4\beta^2}, \qquad \text{d'où} \qquad 2\beta\lambda_1 = \sqrt{4\beta - \alpha^2},$$

et en même temps

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{tang}\theta + \dfrac{\alpha}{2\beta}}{\lambda_1}, \qquad \operatorname{tang}\varphi_0 = \frac{\alpha}{2\beta\lambda_1},$$

nous aurons

$$x = \frac{v_0^2}{g\beta\lambda_1} (\varphi - \varphi_0). \tag{7}$$

Mais on tire des formules précédentes

$$\operatorname{tang}(\varphi - \varphi_0) = \frac{2\beta\lambda_1 \operatorname{tang}\theta}{2 + \alpha \operatorname{tang}\theta},$$

et, par suite,

$$x = \frac{v_0^2}{g\beta\lambda_1} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{2\beta\lambda_1 \operatorname{tang}\theta}{2+\alpha\operatorname{tang}\theta}\right); \tag{8}$$

mais dans le cas actuel $2\beta\lambda_1 \operatorname{tang}\theta$ sera au plus égal à $0,268 \operatorname{tang}\theta$ [1]; il sera donc assez petit par rapport à $2+\alpha\operatorname{tang}\theta$, et l'on aura, en développant l'arc tang et ne gardant que les deux premiers termes,

$$x = \frac{2v_0^2 \operatorname{tang}\theta}{g(2+\alpha\operatorname{tang}\theta)}\left[\frac{4\beta^2\lambda_1^2\operatorname{tang}^2\theta}{3(2+\alpha\operatorname{tang}\theta)^2}\right].$$

Si dans cette formule on remplace alors λ_1 par sa valeur, on retrouve la formule (6) qui est donc applicable dans tous les cas.

Passons maintenant à l'étude de la seconde partie de la trajectoire, c'est-à-dire de l'arc pour lequel on a

$$45^\circ < \theta < 90^\circ.$$

Les valeurs x_1 et y_1 de x et de y pour l'origine de cet arc seront données par les formules (6) et (4) où l'on fait $\operatorname{tang}\theta = 1$.

Nous avons d'ailleurs toujours la formule (1) et nous déduirons des formules (2) et (3)

$$x - x_1 = \int_{45^\circ}^{\theta} \frac{v_0^2}{g} \frac{d\theta}{\cos^2\theta + \dfrac{2v_0^2}{\chi^2}\zeta(\theta)\cos^2\theta}, \tag{9}$$

$$y - y_1 = \int_{45^\circ}^{\theta} \frac{v_0^2}{g} \frac{\operatorname{tang}\theta\, d\theta}{\cos^2\theta + \dfrac{2v_0^2}{\chi^2}\zeta(\theta)\cos^2\theta}. \tag{10}$$

Or pour

$$45^\circ < \theta < 90^\circ,$$

si l'on considère l'expression

$$z = \zeta(\theta)\cos^2\theta - (0,5 + 0,09\sin 2\theta),$$

on reconnaît qu'on a toujours

$$|z| < 0,02;$$

---

(1) On a en effet

$$2\beta\lambda_1 = \sqrt{4\beta - \alpha^2} = \sqrt{\alpha(0,536-\alpha)} \qquad \text{avec} \qquad 0 < \alpha < 0,536;$$

or, dans ces conditions,

$$\alpha(0,536-\alpha) \leqq \overline{0,268}^2.$$

de sorte que, pour ces valeurs de θ, on aura avec une approximation toujours suffisante

$$\zeta(\theta)\cos^2\theta = 0,5 + 0,09\sin 2\theta,$$

et, si nous posons

$$A^2 = \frac{\chi^2}{v_0^2} + 0,9676,$$

les formules (9) et (10) nous donneront

$$x - x_1 = \frac{\chi^2}{g}\int_{45°}^{\theta}\frac{d\tang\theta}{(\tang\theta + 0,18)^2 + A^2},$$

$$y - y_1 = \frac{\chi^2}{g}\int_{45°}^{\theta}\frac{\tang\theta\, d\tang\theta}{(\tang\theta + 0,18)^2 + A^2}.$$

Si alors nous posons de nouveau

$$\tang\psi = \frac{\tang\theta + 0,18}{A}, \qquad \tang\psi_0 = \frac{1,18}{A},$$

nous aurons

$$(11)\qquad \begin{cases} x - x_1 = \dfrac{\chi^2}{gA}(\psi - \psi_0), \\ y - y_1 = \dfrac{\chi^2}{gA}\displaystyle\int_{\psi_0}^{\psi}(A\tang\psi - 0,18)\,d\psi \end{cases}$$

ou

$$(12)\qquad y - y_1 = \frac{\chi^2}{g}\,\mathcal{L}\frac{\cos\psi_0}{\cos\psi} - 0,18(x - x_1).$$

Comme d'ailleurs (¹)

$$\tang(\psi - \psi_0) = \frac{A(\tang\theta - 1)}{1,18\tang\theta + \dfrac{\chi^2}{v_0^2} + 1,18},$$

on pourra écrire

$$(13)\qquad x = x_1 + \frac{\chi^2}{gA}\,\text{arc tang}\left[\frac{A(\tang\theta - 1)}{1,18\tang\theta + \dfrac{\chi^2}{v_0^2} + 1,18}\right].$$

Les valeurs de x_1 et de y_1 sont d'ailleurs fournies par les formules (4) et (6)

(¹) En tenant compte de la relation

$$A^2 = \frac{\chi^2}{v_0^2} + 0,9676.$$

où l'on fait $\tang\theta = 1$, de sorte qu'on a

$$x_1 = \frac{2v_0^2}{g(2+\alpha)}\left[1 - \frac{4\beta - \alpha^2}{3(2+\alpha)^2}\right],$$

$$y_1 = \frac{v_0^2}{2g\beta}\mathcal{L}(1+\alpha+\beta) - \frac{\alpha}{2\beta}x_1.$$

Si, en particulier, on veut avoir l'abscisse X de l'asymptote verticale, il suffira de faire $\theta = 90^\circ$ dans la formule (13) et l'on aura

$$X = x_1 + \frac{\chi^2}{gA}\,\text{arc tang}\,\frac{A}{1,18}.$$

MÉMOIRES LUS.

Appareil prothétique à mouvements coordonnés pour amputés de cuisse ; par M. Pierre Delbet.

L'étude des membres postérieurs envisagés dans leur ensemble révèle l'existence d'un mécanisme d'adaptation qui, en dehors de toute contraction musculaire, facilite la marche par l'utilisation de l'énergie cinétique du corps en mouvement.

Ce mécanisme est très apparent chez les animaux coureurs. Il est dû à ce que certains muscles sautent par-dessus deux articulations.

Chez un chien dont la contractilité musculaire a été supprimée par un artifice quelconque, une attitude déterminée de la cuisse impose une attitude correspondante du pied et inversement. Dans la marche ou la course, quand une patte de derrière arrive au contact du sol, le mouvement de la masse du corps animée de vitesse fléchit le pied qui porte par son extrémité antérieure. Par la flexion, les jumeaux sont tendus ; ainsi, non seulement la chute est adoucie comme par un ressort, mais une partie de l'énergie cinétique, au lieu d'être transformée en chaleur, est emmagasinée sous forme de tension élastique et presque immédiatement restituée pour ramener le pied en extension, ce qui contribue à la propulsion du corps en avant.

Un mécanisme de ce genre peut être réalisé par un appareil prothétique puisque la contraction musculaire n'y joue pas de rôle. Il peut l'être de différentes façons. Celle que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie me paraît la plus simple, la plus robuste et la plus économique.

L'appareil se compose de trois segments articulés, d'une bielle et d'un ressort. Les segments représentent la cuisse, la jambe et le pied.

L'amputé, par la contraction des muscles de son moignon, projette l'appareil en avant. Celui-ci prend contact avec le sol par l'extrémité postérieure, calcanéenne de la semelle plantaire. Sous l'influence de la pression, la semelle tourne autour de l'articulation qui la joint à la tige représentant le tibia. Des deux angles qu'elle fait avec cette tige, le postérieur se ferme, l'antérieur s'ouvre. C'est l'inverse qui se produit quand le centre de gravité du corps a passé en avant de l'appareil, parce que l'appui se fait alors sur la partie antérieure de la semelle plantaire.

En employant le langage physiologique, on peut dire que la semelle plantaire se porte alternativement en flexion et en extension. Ces mouvements de pédale se font avec une grande énergie, énergie évidemment variable avec la masse du corps et sa vitesse, mais par là même proportionnée au but à atteindre.

Il est facile de les utiliser au moyen d'une bielle.

Cette bielle, antérieure et parallèle à la tige qui représente le tibia, étant articulée en bas avec la semelle plantaire, en haut avec un levier lié aux tiges qui représentent le fémur, produira dans l'articulation correspondant au genou des mouvements alternatifs de flexion et d'extension, commandés par les mouvements de la semelle plantaire et qui se feront pendant la marche aux mêmes moments que ceux d'un membre véritable. Il est aisé, en réglant convenablement la longueur des leviers, de leur donner la même amplitude qu'à ceux du membre sain.

Grâce à cette flexion automatique du genou, le centre de gravité du corps n'a pas besoin de s'élever autant pour dépasser la verticale du point d'appui du membre artificiel, et le sautillement est évité.

En outre, une partie de l'énergie cinétique qui produit la flexion est emmagasinée dans ce ressort, qui la restitue pour ramener le membre en extension.

Ainsi, ce nouvel appareil exécute automatiquement des mouvements en quelque sorte physiologiques. Non seulement il dissimule l'infirmité, mais, ce qui est plus important, il facilite beaucoup la marche.

CORRESPONDANCE.

M. G. Cesàro, en adressant ses remercîments à l'Académie pour l'attribution du prix Gegner, ajoute qu'il apprécie d'autant plus cette distinction que le prix lui est attribué au moment où, Président de l'Académie Royale de Belgique, il représente à la fois cette Académie et son pays.

M. le général **H. Courbebaisse** adresse, en son nom et au nom de sa famille, des remercîments pour la distinction que l'Académie a accordée aux travaux d'*Albert de Romeu*, mort au champ d'honneur, et fait connaître que la famille abandonne le montant du prix pour l'hôpital que patronne l'Institut et qui est installé à l'hôtel Thiers.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

Le fascicule X (planches) des *Études de Lépidoptérologie comparée*, par Charles Oberthur. (Présenté par M. E.-L. Bouvier.)

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la généralisation des séries de Lagrange et de Laplace.* Note [1] de M. **J. Kampé de Fériet**, présentée par M. Appell.

L'étude du système d'équations

$$u = x + a\varphi(u, v); \qquad v = y + b\psi(u, v)$$

a conduit M. Darboux [2] à une élégante généralisation de la série de Lagrange

$$F(u, v)\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \sum \frac{a^m}{m!}\frac{b^n}{n!}\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}[\varphi^m \psi^n F].$$

On peut obtenir des résultats plus étendus, en partant des n équations

---

(1) Séance du 26 avril 1915.

(2) G. Darboux, *Sur la série de Laplace* (*Comptes rendus*, t. 68, p. 324).

simultanées :

$$(1)\qquad u_j = x_j + \sum_{k=1}^{k=n} a_k \varphi_{j,k}(u_1, \ldots, u_n) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

En effet, en désignant par $u_1, \ldots, u_n$ les racines de ce système qui se réduisent à $x_1, \ldots, x_n$ pour $a_1 = \ldots = a_n = 0$, on a le développement

$$(2)\qquad F(u_1, \ldots, u_n)\frac{D(u_1, \ldots, u_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = \sum \frac{a_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{a_n^{m_n}}{m_n!} P_{m_1, \ldots, m_n},$$

où symboliquement

$$(3)\qquad P_{m_1, \ldots, m_n} = \left[\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi_{k,1}\right]^{m_1} \cdots \left[\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi_{k,n}\right]^{m_n} F.$$

Voici une démonstration inspirée de celle que H.-E. Heine [1] a donnée pour la série de Lagrange. On considère la fonction arbitraire $\Phi(y_1, \ldots, y_n)$ où $y_i = x_i - \sum_{k=1}^{k=n} a_k \varphi_{i,k}(x_1, \ldots, x_n)$:

$$(4)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(y_1, \ldots, y_n) = \sum \dfrac{(-1)^{\mu}}{m_1! \ldots m_n!} [\Sigma a_k \varphi_{1,k}]^{m_1} \ldots [\Sigma a_k \varphi_{n,k}]^{m_n} \dfrac{\partial^{\mu} \Phi}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} \\ \qquad\qquad (\mu = m_1 + \ldots + m_n), \end{array} \right.$$

puis on forme l'intégrale

$$(5)\qquad J = \int_{(X_1)}^{n} F(x_1, \ldots, x_n) \Phi(y_1, \ldots, y_n)\, dx_1 \ldots dx_n,$$

X_1 désignant le domaine limité par la multiplicité : $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. On peut écrire

$$J = \int_{(U)}^{n} F(u_1, \ldots, u_n) \Phi(x_1, \ldots, x_n)\, du_1 \ldots du_n,$$

où U désigne le domaine limité par la multiplicité : $f(u_1, \ldots, u_n) = 0$; ou enfin

$$J = \int_{(X_2)}^{n} F(u_1, \ldots, u_n) \frac{D(u_1, \ldots, u_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \Phi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n,$$

X_2 étant le domaine des x qui correspond à U. On donne ensuite à Φ une

---

(1) H.-E. Heine, *Lagrange's Umkehrungsformel* (*Journal für die reine und angew. Matematik*, t. 54, 1857, p. 388).

variation $\delta\Phi$, arbitraire dans le domaine [1] X_0 commun aux domaines X_1 et X_2, nulle sur la frontière de X_0 et au dehors :

$$\delta J = \int_{(X_0)}^{n} F(u_1, \ldots, u_n) \frac{D(u_1, \ldots, u_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \delta\Phi \, dx_1 \ldots dx_n.$$

D'autre part, en remplaçant dans (5) Φ par son développement (4), on obtient une deuxième expression de δJ, où figurent des termes de la forme

$$\int_{(X_0)}^{n} F[\Sigma a_k \varphi_{1,k}]^{m_1} \ldots [\Sigma a_k \varphi_{n,k}]^{m_n} \delta \left(\frac{\partial^\mu \Phi}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} \right) dx_1 \ldots dx_n.$$

En transformant ces termes par les procédés du Calcul des Variations et en identifiant les deux expressions de δJ, on trouve la formule (3).

Les expressions $P_{m_1, \ldots, m_n}$ se simplifient d'une façon remarquable quand les fonctions $\varphi_{j,k}$ satisfont à certaines conditions :

1° Soit

$$\varphi_{j,k} \equiv 0 \quad (k \neq j), \qquad \varphi_{j,j} = \psi_j(u_1, \ldots, u_n);$$

les équations (1) se réduisent à la forme considérée par M. Darboux :

$$P_{m_1, \ldots, m_n} = \frac{\partial^\mu}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} [\psi_1^{m_1} \ldots \psi_n^{m_n} F]. \tag{6}$$

2° Soit

$$\varphi_{1,k} = \psi_k(u_1), \qquad \varphi_{j,k} \equiv 0 \quad (j > 1);$$

les équations (1) s'écrivent

$$u_1 = x_1 + \sum_{k=1}^{k=n} a_k \psi_k(u_1), \qquad u_2 = x_2, \qquad u_n = x_n;$$

ici

$$P_{m_1, \ldots, m_n} = \frac{d^\mu}{dx_1^\mu} [\psi_1^{m_1} \ldots \psi_n^{m_n} F]. \tag{7}$$

Dans ce type, rentre la généralisation que M. Appell [2] a donnée de l'équation de Képler :

$$u - e_1 \sin u - \frac{e_2}{2} \sin 2u - \ldots - \frac{e_n}{n} \sin nu = \frac{2\pi t}{T}.$$

---

(1) Le domaine X_0 existe toujours, pourvu que les a_k soient suffisamment petits.

(2) P. APPELL, *Sur l'inversion approchée de certaines intégrales réelles et sur l'extension de l'équation de Képler et des fonctions de Bessel* (*Comptes rendus*, t. 160, 1915, p. 419).

3° Soit

$$\varphi_{j,k} = \psi_k(u_1, \ldots, u_n);$$

ici

$$(8) \qquad P_{m_1,\ldots,m_n} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\mu} [\psi_1^{m_1} \ldots \psi_n^{m_n} F].$$

Comme application, on peut prendre $\psi_k = \frac{u_k^2 - 1}{2}$, $F = 1$; les fonctions P_{m_1, m_n}, qui se réduisent alors aux polynomes

$$P_{m_1,\ldots,m_n} = \frac{1}{2^{\mu}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\mu} [(x_1^2 - 1)^{m_1} \ldots (x_n^2 - 1)^{m_n}],$$

admettent la fonction génératrice

$$\frac{D(u_1, \ldots, u_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}$$
$$= \{(a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n - 1)^2 + (a_1 + \ldots + a_n) \times [a_1(1 - x_1^2) + \ldots + a_n(1 - x_n^2)]\}^{-\frac{1}{2}},$$

qui généralise celle de Legendre.

MÉCANIQUE RATIONNELLE. — *Sur une figure d'équilibre des fluides en rotation*. Note (¹) de M. **Pierre Humbert**, présentée par M. Appell.

Dans la série des figures d'équilibre voisines des ellipsoïdes de Jacobi, celle qu'on rencontre après la figure piriforme correspond à la valeur $n = 4$ du paramètre de l'équation de Lamé et présente trois plans de symétrie. Poincaré (²) en a donné un schéma qui, comme pour le piroïde, ne repose sur aucun calcul; une étude plus sérieuse a été faite par M. Liapounoff (³), qui néanmoins n'en a tiré aucune conclusion relative à la forme de la figure en question. C'est l'étude de cette forme qui fait l'objet de la présente Note.

Les axes de l'ellipsoïde de référence étant a, b et o, désignons par α_1 et α_2 les deux quantités positives et inférieures à b^2, telles que $R = (\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2)$ soit une fonction de Lamé pour $n = 4$. Le calcul de ces quantités est aisé : leur somme, par exemple, est racine de l'équation

---

(¹) Séance du 26 avril 1915.

(²) *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, p. 162.

(³) *Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation*, 3ᵉ Partie, Chap. I.

du troisième degré

$$49x^3 - 98(a^2+b^2)x^2 + 4x[12(a^2+b^2)+13a^2b^2] - 48a^2b^2(a^2+b^2) = 0.$$

Les résultats numériques de M. Liapounoff, bien que présentés sous une forme différente, permettent de calculer les valeurs de ces diverses constantes, ainsi que des axes A, B, C, du Jacobien critique :

$$a^2 = 5,22, \quad b^3 = 5,11, \quad \alpha_1 = 3,82, \quad \alpha_2 = 0,60,$$
$$A = 0,60, \quad B = 0,69, \quad C = 2,36.$$

D'autre part, le déplacement normal à partir du point x, y, z du Jacobien est

$$\zeta = \varepsilon\left(\frac{x^2}{\alpha_1 - a^2} + \frac{y^2}{\alpha_1 - b^2} + \frac{z^2}{\alpha_1} - 1\right)\left(\frac{x^2}{\alpha_2 - a^2} + \frac{y^2}{\alpha_2 - b^2} + \frac{z^2}{\alpha_2} - 1\right),$$

où ε est une constante arbitraire, mais petite. Il est alors aisé de calculer les coordonnées des points où se coupent les sections, par les plans des xz et des yz, du Jacobien et de la figure voisine : car, en ces points, $\zeta = 0$. On trouve ainsi :

Section par le plan des xz.

Premier point de rencontre...........	$x_1 = 0,31$	$z_1 = 2,01$
Deuxième point de rencontre.........	$x_2 = 0,56$	$z_2 = 0,78$

et les symétriques par rapport aux deux axes.

Section par le plan des yz.

Premier point de rencontre...........	$y'_1 = 0,30$	$z'_1 = 2,03$
Deuxième point de rencontre........	$y'_2 = 0,57$	$z'_2 = 0,80$

et les symétriques.

Si l'on construit la section de la figure considérée par le plan des xz, par exemple, on constate que, même pour de très petites valeurs de ε, telles que 0,05, cette section semble présenter des points d'inflexion. Prouvons qu'effectivement il y en a pour de telles valeurs de ε. Les coordonnées d'un point de la section sont

$$X = A\cos\varphi + C\cos\varphi\,\zeta_1 P^{-\frac{1}{2}},$$
$$Z = C\sin\varphi + A\sin\varphi\,\zeta_1 P^{-\frac{1}{2}},$$
$$P = C^2\cos^2\varphi + A^2\sin^2\varphi,$$
$$\zeta_1 = \varepsilon\left(\frac{A^2\cos^2\varphi}{\alpha_1 - a^2} + \frac{C^2\sin^2\varphi}{\alpha_1} - 1\right)\left(\frac{A^2\cos^2\varphi}{\alpha_2 - a^2} + \frac{C^2\sin^2\varphi}{\alpha_2} - 1\right).$$

Afin de simplifier le calcul, cherchons la valeur de l'expression

$$\frac{d^2Z}{d\varphi^2}\frac{dX}{d\varphi} - \frac{d^2X}{d\varphi^2}\frac{dZ}{d\varphi}$$

au point x_1, z_1, pour lequel $\zeta_1 = 0$. Elle est égale à

$$AC - P^{-\frac{1}{2}}\frac{d\zeta_1}{d\varphi}\sin\varphi\cos\varphi(C^2 - A^2) + 2ACP^{-1}\left(\frac{d\zeta_1}{d\varphi}\right)^2 - P^{\frac{1}{2}}\frac{d^2\zeta_1}{d\varphi^2},$$

et, comme en ce point $\sin\varphi = 0,85$, elle prend la valeur

$$31\varepsilon^2 - 21,4\varepsilon + 1,42$$

et s'annule pour $\varepsilon = 0,07$. Donc, même pour les valeurs très petites de ε, on constate la présence de points d'inflexion, alors que, pour le piroïde, il n'y en a pas même pour $\varepsilon = 0,25$. Le schéma de Poincaré n'est donc pas très éloigné de la réalité, bien que la forme du Jacobien y soit très inexacte.

HYDRODYNAMIQUE. — *Sur les lois d'écoulement par gouttes par les orifices capillaires.* Note de M. E. VAILLANT, présentée par M. J. Violle.

J'ai déjà eu l'occasion de montrer [1] que le poids des gouttes qui tombent d'un orifice capillaire est une fonction assez compliquée de la fréquence des chutes. A mesure que cette fréquence augmente, le poids augmente d'abord, passe par un maximum, décroît ensuite très vite, mais en subissant, pour certaines valeurs critiques de fréquence, de brusques augmentations, en sorte qu'aux grandes vitesses le poids de la goutte peut être notablement supérieur à celui qu'elle avait lors du passage par le premier maximum.

En comparant les résultats obtenus avec une série de 15 tubes de diamètres intérieurs et extérieurs différents, j'ai pu constater que les lois du phénomène sont très nettes et relativement très simples.

Le dispositif employé est celui que j'ai précédemment indiqué, mais un peu amélioré. Le bout de tube capillaire est fixé à l'une des branches d'un siphon dont l'autre branche plonge dans un vase à circulation d'eau. Le siphon est fixe, tandis que le vase est solidaire du chariot d'un cathétomètre et peut être élevé ou abaissé à volonté par déplacements lents et progressifs. L'orifice capillaire est disposé à 1^{cm} environ

---

[1] *Comptes rendus*, t. 158, 1914, p. 93.

au-dessus d'une gouttière inclinée, en zinc, formée de deux parties qui chevauchent légèrement l'une sur l'autre. Chacune de ces parties tend à être entraînée par un ressort indépendant dont le déclenchement est commandé par un bouton. En appuyant sur le bouton correspondant à la moitié inférieure de la gouttière, les deux parties se séparent laissant entre elles un vide par lequel passent les gouttes. Lorsqu'on a recueilli le nombre voulu de gouttes, il suffit de presser le bouton qui commande la moitié supérieure de la gouttière pour obturer l'orifice. On remonte ensuite les deux parties de la gouttière en vue de l'expérience suivante. Pendant toute la série des mesures faites sur un même tube, l'écoulement par l'orifice reste ininterrompu.

Le vase qui sert aux pesées est un vase à précipités dans le col duquel on a mastiqué un tube droit qui descend jusqu'à quelques millimètres du fond. Cette disposition a pour effet d'empêcher le rejaillissement du liquide à l'extérieur, lorsqu'on recueille les gouttes. Le tube peut être fermé à l'émeri. Lorsque le bouchon est en place, la perte de poids par évaporation n'excède pas 1^{mg} par 24 heures ; elle est complètement négligeable en cours d'opération.

L'ouverture momentanée de la cage de la balance détermine, du côté ouvert, des variations de température qui peuvent fausser les mesures de quelques dixièmes de milligrammes. On a soin d'attendre que le poids indiqué reste stationnaire. Après chaque déplacement au cathétomètre, on attend également quelques minutes pour permettre à la vitesse de chute de prendre sa nouvelle valeur de régime. L'ensemble des opérations sur un tube ne dure d'ailleurs que quelques heures, et se fait par conséquent à température sensiblement constante.

Le diamètre intérieur des tubes expérimentés a varié depuis $0^{mm},4$ jusqu'à $2^{mm},4$; le diamètre extérieur, de $2^{mm},3$ à 7^{mm} ; le rapport des deux diamètres, de $\frac{1}{12}$ à $\frac{1}{2}$.

Les principaux résultats obtenus sont les suivants :

1° Le produit du diamètre intérieur d par l'intervalle de chute T correspondant au premier maximum est un nombre constant A ou un multiple simple de ce nombre. Depuis la fréquence zéro jusqu'à celle qui correspond au premier maximum, le poids varie à peu près linéairement avec la fréquence (après le passage, la variation en sens inverse est beaucoup plus rapide). La droite ainsi définie détermine par extrapolation le poids P_∞ correspondant à la fréquence nulle. Cela posé :

2° Le quotient par le diamètre intérieur d de l'augmentation de poids $\delta = P_m - P_\infty$, de la goutte depuis l'origine jusqu'au premier maximum est un nombre constant B, ou un multiple simple de ce nombre.

3° Le quotient du poids origine P_∞ par le diamètre extérieur D est un nombre constant C. Ce nombre C est d'ailleurs différent de B. En outre, il n'est pas le même pour les tubes de diamètre supérieur à 5^{mm} que pour les tubes de diamètre inférieur.

Ces trois lois se déduisent de l'examen du Tableau suivant qui résume les résultats obtenus :

Tubes.	$d \times 10^4$ cm.	$D \times 10^4$ cm.	$P_m \times 10^5$ g.	$P_\infty \times 10^5$ g.	T sec.	$Td \times 10^3$ (A).	$\frac{\delta}{d} \times 10^4$ g-cm (B).	$\frac{P_\infty}{D} \times 10^4$ g-cm (C).
1.....	1363	3403	5890	5561	0,61	830	241	1630
2.....	1360	4590	7584	7240	0,61	830	253	1580
3.....	1088	8412	5880	5613	0,75	826	245	1640
4.....	490	3878	6294	6160	1,70	833	273	1590
5.....	792	3125	5226	5000	1,04	824	285	1600
6.....	732	3170	5376	5212	1,12	830	224	1640
7.....	547	2316	3973	3839	1,51	824	245	1650
8.....	522	2956	4860	4723	1,60	835	262	1600
9.....	989	3830	6296	6038	0,84	831	265	1580
10.....	2022	3970	7188	6268	0,406	820	2×228	1580
11.....	590	6370	9242	9100	2,84	2×838	244	1430
12.....	406	4969	7546	7344	2,05	822	2×249	1480
13.....	1721	5813	9214	8430	0,48	826	2×227	1440
14.....	569	6163	8860	8722	2,94	2×836	243	1420
15.....	2418	7003	11096	9958	0,70	2×846	2×235	1420

Les deux dernières lois apparaissent comme moins bien vérifiées que la première, ce qui s'explique par le fait que δ, étant parfois très petit, est affecté d'une erreur relative assez grande et aussi parce que δ et P_∞ s'obtiennent indirectement par une extrapolation graphique également assez peu précise.

Aux trois lois énoncées, il semble qu'on puisse joindre la suivante :

4° Lors d'une augmentation brusque du poids de la goutte, le quotient de cette augmentation de poids par le diamètre intérieur est égal au nombre B ou à un multiple simple de B.

Cette loi est assez difficile à vérifier, car il est rare de constater l'augmentation à la vitesse même à laquelle elle se produit. Je signalerai cependant le double résultat suivant observé sur le tube 1. Pour une fréquence voisine de 170 chutes par minute, on obtient suivant les circonstances deux valeurs pour le poids, 5686 et 6355, dont la différence est 669 ; de même pour une fréquence de 315, on obtient indifféremment les poids 6104 et 6671 dont la différence est 667 ; divisées par le diamètre intérieur du tube, ces différences donnent les quotients 2×245 et 2×244, alors que la valeur moyenne de B est 248.

PHYSIQUE. — *Résonance optique dans le champ magnétique.* Note [1] de M. **Léon Bloch**, présentée par M. E. Bouty.

Il ne semble pas qu'on ait fait jusqu'ici d'expériences systématiques pour établir l'influence du champ magnétique sur les phénomènes de résonance optique. Les intéressantes observations de A. v. Malinowski [2] montrent seulement que cette influence existe et qu'elle peut servir à déceler la complexité d'une raie spectrale.

Nous avons récemment [3] émis l'idée que la résonance optique, comme la diffusion, est d'origine électromagnétique et montré qu'elle doit être alors proportionnelle au carré de la longueur d'onde.

Si l'on adopte cette manière de voir, qui rattache les phénomènes de résonance aux équations classiques de la théorie de la dispersion, il devient facile de prévoir les changements de position et d'intensité des raies de résonance qui doivent se produire lorsque les équations du mouvement de l'électron se compliquent de termes supplémentaires, comme c'est le cas dans le champ magnétique.

En se conformant aux notations de Drude [4], on trouve pour le *rapport de dissipation* en l'absence du champ magnétique [5]

$$\mathrm{I} = \frac{\omega^4 \theta^2}{6\pi c^4} \frac{1}{|\Theta|^2}. \tag{1}$$

Dans le champ magnétique, il y a lieu de distinguer entre le cas où le rayon lumineux est parallèle aux lignes de force du champ et le cas où il leur est perpendiculaire.

I. *Rayon longitudinal.* — Le rapport de dissipation correspondant aux deux circulaires gauche et droit est donné par la formule

$$\mathrm{I} = \frac{\omega^4 \theta^2}{6\pi c^4} \frac{1}{|\Theta \mp \Phi|^2}. \tag{2}$$

---

(1) Séance du 26 avril 1915.

(2) *Phys. Zeitsch.*, t. 14, 1913, p. 884.

(3) L. Bloch, *Comptes rendus*, t. 160, 1915, p. 341.

(4) P. Drude, *Lehrbuch der Optik*, p. 423.

(5) L. Bloch, *loc. cit.*

Si l'on considère Φ comme un infiniment petit du premier ordre ([1]), on voit que le rapport de dissipation et le coefficient d'absorption, qui lui est proportionnel, ne subissent, dans le champ magnétique, qu'une variation infiniment petite du premier ordre. L'intensité de la résonance totale ne sera pas modifiée par le champ d'une façon sensible. La raie de résonance primitivement unique sera seulement dédoublée en deux raies occupant presque exactement la place des deux raies du doublet de Zeeman. Observées transversalement, ces deux raies paraîtront polarisées rectilignement comme les composantes extérieures du triplet normal.

II. *Rayon transversal.* — Si la vibration est parallèle aux lignes de force, le champ magnétique est sans action, il n'y a aucune modification ni dans la diffusion de la lumière, ni dans la résonance. Si la vibration a lieu dans un plan perpendiculaire au champ, le rapport de dissipation s'écrit

$$(3) \qquad \mathrm{I} = \frac{\omega^4 \theta^2}{6\pi c^4} \frac{\left|\frac{\nu}{\varepsilon''}\Theta - \Phi\right|^2 + \left|\Theta + \frac{\nu}{\varepsilon''}\Phi\right|^2}{|\Theta^2 - \Phi^2|^2\left(1 + \frac{\nu^2}{\varepsilon''^2}\right)}.$$

On voit qu'il n'est modifié qu'au second ordre près, si ν et Φ sont du premier ordre. Ici encore le champ magnétique ne change pas sensiblement l'intensité de la résonance. Il dédouble seulement la raie initiale en deux raies pratiquement confondues avec les composantes extérieures du triplet de Zeeman. Observées dans le sens longitudinal, les raies de résonance paraîtront polarisées rectilignement.

En résumé, si l'on est loin de la résonance, la diffusion de la lumière n'est pas modifiée sensiblement par le champ magnétique. A la résonance exacte, le phénomène de Zeeman se traduit par un dédoublement sensible des raies de résonance, accompagné d'une variation d'intensité trop faible pour être accessible à l'expérience.

([1]) C'est ce que fait Drude. Le terme Φ est proportionnel au champ magnétique.

PHYSIQUE. — *Sur la détermination du rapport γ par l'intermédiaire de la vitesse du son.* Note de M. A. Leduc, présentée par M. E. Bouty.

Le grand intérêt qui s'attache à la connaissance du rapport γ des deux chaleurs spécifiques principales des gaz et vapeurs a suscité de nombreuses recherches par des méthodes variées. Malgré cela, nous ne possédons qu'un petit nombre de résultats dont la seconde décimale puisse être garantie, et la pénurie est surtout grande en ce qui concerne les vapeurs. On voit bien figurer dans certains Ouvrages les γ déterminés par certains auteurs avec 4 ou 5 décimales; mais si la troisième est probable dans quelques cas (gaz quasi parfaits et faciles à préparer), elle est généralement très inexacte. C'est ainsi que, pour l'acide carbonique à 0°, on trouve, d'après Wüllner, 1,31131, tandis que le calcul exact donne au moins 1,319, d'après les expériences mêmes de l'auteur.

J'ai été amené à discuter les valeurs les plus récentes, et j'ai d'abord examiné si les valeurs de la vitesse du son consignées dans le Recueil de la Société française de Physique conduisent à des valeurs considérées comme exactes ou simplement acceptables. On a [1]

$$V = \varphi\sqrt{\frac{RT}{M}\,\frac{\gamma}{1+nP^2}}.$$

Je vais résumer les observations que suggèrent les résultats obtenus. La troisième décimale n'est donnée qu'à titre d'indication pour les vapeurs, et surtout pour les quatre dernières :

1° Az. — V observé par Bückendahl, à 0° et $76^{cm} = 337,3$ m:sec conduit à $\gamma = 1,404$ qui semble exact.

2° H. — Le Recueil donne comme observé par Stürm à 20° et 76^{cm}, $V = 1258^m$. On en déduirait $\gamma = 1,307$. L'erreur est flagrante : ce V a été ramené à 0°. Si l'on calcule, réciproquement, V_0 en admettant $\gamma = 1,390$ [2], on trouve $V_0 = 1253^m$.

---

[1] Voir *Comptes rendus*, t. 160, p. 516.

[2] Cf. A. Leduc, *Ann. de Chim. et de Phys.*, 7e série, t. 17, p. 499. Il résulte de l'ensemble des meilleures déterminations que, conformément à la théorie cinétique, $\gamma = 1,4$ pour les gaz diatomiques dans l'état parfait, et que $\gamma \gtrless 1,4$ suivant qu'ils s'écartent dans un sens ou dans l'autre de la loi de Mariotte. Le nombre 1,408 attribué à l'hydrogène par Lummer et Pringsheim me paraît inacceptable.

3° CO^2. — Bückendahl donne $V_0 = 258^m$. De là $\gamma = 1,308$, nombre trop faible. On aurait en outre, d'après cet auteur, 1,291 à 100°, 1,292 à 300° et 1,283 à 770°. Cette marche est inacceptable.

4° H^2O. — On aurait, d'après Jaeger, dans la vapeur saturante à 96°, $V = 410^m$. Même erreur que pour H. Ce nombre a été « ramené à 0° », ce qui n'a d'ailleurs aucun sens expérimental. Les expériences de Jaeger donneraient, en réalité, $475^m,5$ environ.

Les expériences de Neyreneuf conduisent, pour la vapeur saturante à 100° ou légèrement surchauffée, à $V = 479^m,5$ en moyenne. On en déduit $\gamma = 1,365$; ce nombre ne s'accorde qu'assez bien avec la valeur 1,373 que j'ai calculée pour la vapeur saturante [1].

5° C^6H^6. — D'après Stevens, $V = 205^m$ dans la vapeur saturante à 99°,7. On en déduit $\gamma = 1,170$, au lieu de 1,136 calculé par moi [1].

6° $(C^2H^5)^2O$. — D'après Neyreneuf [2], on aurait, dans la vapeur saturante à 35° ou légèrement surchauffée, $V = 195^m$. On en déduirait $\gamma = 1,213$, au lieu de 1,083 calculé par moi, le tout en admettant que la vapeur d'éther est normale (ce qui semble d'ailleurs sensiblement exact).

L'absence de renseignements m'oblige à faire gratuitement la même hypothèse pour les vapeurs suivantes dans lesquelles V a été déterminé par Stevens (1902) au voisinage de 100°, à l'état saturant.

7° $C^2H^5.OH$. — $V = 272^m,8$ à 99°,8 conduit à $\gamma = 1,204$, qui semble acceptable.

8° $CH^3.OH$. — $V = 350^m,3$ à 99°,7 conduit à $\gamma = 1,407$, qui est probablement trop élevé.

9° $CHCl^3$. — $V = 171^m,4$ à 99°,8; $\gamma = 1,360$. Notons que Capstick trouve 1,154 à 20° et $0^{atm},15$. L'écart de ces deux nombres semble exagéré d'après ce que nous savons sur la vapeur d'eau (*loc. cit.*, p. 599).

10° CS^2. — $V = 232^m,2$ à 99°,7. On en déduit $\gamma = 1,628$, tandis que Capstick donne 1,259 à 14° et $0^{atm},2$. Même remarque : le premier nombre est probablement trop fort; mais le second est inadmissible comme inférieur au γ d'un gaz triatomique parfait.

---

(1) *Ann. de Ch. et de Phys.*, 8e série, t. **28**, p. 590.

(2) Neyreneuf (*Ann. de Ch. et de Phys.*, 6e série, t. 9, p. 535-553) déduit de ses expériences $\gamma = 1,09$, mais en s'appuyant sur des données anciennes qu'on sait aujourd'hui inexactes. Je regrette que mes formules ne permettent pas de calculer γ à 100° d'après les expériences plus récentes de Stevens, la pression réduite atteignant 0,18.

Calcul réciproque de la vitesse du son. — Il m'a paru intéressant de comparer quelques-unes des vitesses expérimentales à celles calculées au moyen de la formule ci-dessus, en utilisant les γ fournis par la méthode des cycles. On obtient ainsi (à quelques décimètres près) les résultats ci-après :

1. Dans la *vapeur d'eau* saturante à 100° ($\gamma = 1,373$) $V = 481^m$, et à 96° ($\gamma = 1,371$) $V = 474^m,8$.

2. Vapeur saturante de *benzène* à 100° ($\gamma = 1,136$) $V = 202^m$, et à 80° ($\gamma = 1,132$) $V = 199^m,3$.

3. Éther à 35° : pour la vapeur saturante, $\gamma = 1,083$, et $V = 184^m,3$; sous la pression de 22^{cm} de mercure $\gamma = 1,072$ et $V = 190^m$.

On voit que l'*influence de la température sur la vitesse du son dans les vapeurs saturantes peut être beaucoup plus faible que dans le cas des gaz* (*benzène*), *tandis que la pression a*, *au contraire*, *une influence considérable* (*éther*).

Conclusion. — Il ressort de cet examen que la détermination des γ des vapeurs au moyen de la vitesse du son n'a guère donné de résultats convenables. Cela peut tenir en grande partie à la difficulté d'opérer sur des vapeurs pures. Il ne faut d'ailleurs pas perdre de vue que l'erreur relative sur γ comprend le double de l'erreur sur V.

Il serait donc très désirable, afin de combler cette lacune, de développer la méthode thermodynamique des cycles (3) que j'ai fondée il y a deux ans, et qui ne fait intervenir que des données plus faciles à acquérir. Il faut reconnaître que, malheureusement, nous ne possédons pas actuellement ces données avec une précision suffisante; mais je me propose, dès que les circonstances le permettront, de faire exécuter sous ma direction les déterminations nécessaires.

GÉOLOGIE. — *Études sur les formations tertiaires du bassin de la mer de Marmara : Synthèse des données relatives au Néogène; le moment d'apparition du sillon de la mer de Marmara.* Note (1) de M. N. **Arabu**, présentée par M. H. Douvillé.

Dans quelques Notes antérieures, j'ai soumis à une révision les anciennes listes de fossiles et mentionné des formes nouvelles dans plusieurs étages

(1) Séance du 26 avril 1915.

du Tertiaire de la région. Surtout en ce qui concerne le Néogène, une reprise de la question s'imposait. Il existe, en effet, au nord de la mer de Marmara, dans l'espace triangulaire compris entre le Rhodope à l'Ouest, le massif de la Strandcha, continué par le Dévonien du Bosphore à l'Est et se prolongeant au Sud jusqu'au rivage de la mer, une série épaisse et monotone de grès et de marnes, dépôts généralement saumâtres et très peu fossilifères; une foule de coupures, la plupart artificielles, avaient été proposées dont la nomenclature embrouillée attendait une révision.

Une grande partie de ces dépôts appartient très probablement au Vindobonien; j'ai montré que c'est par leur intermédiaire que se fait la liaison du Vindobonien des environs des Dardanelles avec les marnes bleues à huîtres, du même âge, de Derkos: c'est à cet horizon qu'appartiennent aussi bien les *couches à congéries* de Thrace, que l'étage que Hochstetter avait créé sous le nom de *Thracien* et qui, d'après les régions et les différents auteurs qui s'en sont occupés après lui, représentait le Sarmatien, le Méotique ou le Pontien; quelques auteurs les ont cru pléistocènes. Les couches à lignites qui forment le littoral de la mer Noire entre Karabournou et Kilios sont encore vindoboniennes.

Par-dessus ce Vindobonien existe une couverture laguno-lacustre d'âge sarmatien, réduite actuellement à quelques lambeaux; c'est une importante formation débutant généralement par un conglomérat de base et dont la partie supérieure représente le Méotique.

Mais il est très probable que la sédimentation s'arrête avec le Méotique; Neumayr a mentionné, il est vrai, le Pontien dans la région des Dardanelles en se basant sur une intéressante faune de Vertébrés; mais les formes paléontologiquement les plus jeunes qu'il a citées ont été retrouvées depuis dans le Méotique, ou même dans le Sarmatien supérieur de la Russie.

D'autre part, M. English tient pour du Pontien quelques lambeaux de l'ouest de la Thrace (à Keshan), mais il ne cite que des formes saumâtres, de peu de valeur dans les parallélisations. Le Levantin a été aussi souvent cité dans la région, mais ce qui a été décrit sous ce nom n'est que la partie supérieure du Méotique.

Vers la fin du Miocène, la région se soulève et s'assèche devenant en proie à l'érosion subaérienne. C'est alors, durant le Pontien et une partie du Pliocène, que sont creusées les vallées du Bosphore et des Dardanelles. Les couches de Gallipoli, comme M. Androussow l'a prouvé, ont été déposées pendant une courte invasion des eaux de la lagune pontique après le creusement des susdites vallées, vers la fin du Pliocène.

Les dépôts néogènes des environs de la mer de Marmara présentent une remarquable distribution dans l'espace, sur laquel M. Haug a le premier attiré l'attention; ils sont en effet localisés dans un étroit sillon traversant l'Egéide et prolongeant la traînée de dépôts méditerranéens connus depuis longtemps dans l'ouest de la Macédoine; leur continuation vers l'Est est restée inconnue jusqu'en 1902 quand M. English la découvrit sur la côte

nord du golfe de Xéros au nord des Dardanelles. J'ai précédemment établi sa liaison avec la mer qui couvrait à la même époque la région ponto-caspienne et fait la remarque que c'est alors, pour la première fois, que la région est occupée par des bras de mer avec des contours peu différents de ceux d'aujourd'hui.

Pourtant, la première ébauche de ce sillon de la mer de Marmara, fragment du grand *sillon transégéen*, est d'âge plus ancien.

M. English a démontré que les petites chaînes du Tekir-et Kourau-Dagh ne sont pas de nature cristalline et d'âge archéen comme on le croyait, mais simplement formées de bancs de grès, micacés, de couleur foncée, dépôts épais et uniformes à facies de flysch et d'âge tertiaire.

L'individualité paléontologique de ces dépôts n'est pas encore bien définie, ces couches étant rarement fossilifères; on peut citer pourtant : *Corbicula* n. sp., *Melanopsis fusiformis*, *Anthracotherium minus*; c'est en somme un dépôt de lagunes, déposé dans un golfe partiellement dessalé de la mer oligocène qui s'étendait à l'Ouest; on connaît en effet, dans l'ouest de la Macédoine, des dépôts marins oligocènes, continuant ceux du Vicentin. On peut affirmer que ce Flysch est du même âge, en dehors de toute considération de faune, car il est assez bien encadré stratigraphiquement. Il surmonte (près du village Sterna) des grès à *Nummulites Fabianii* priaboniens et plus loin vers l'Est est recouvert par le *Schlier miocène*. Ce Flysch du Tekir Dagh est un dépôt très important; son facies évidemment n'est pas bathyal, les intercalations grossièrement détritiques et même la stratification diagonale sont fréquentes; mais il faut admettre, vu son uniformité et surtout son épaisseur qui dépasse facilement 1000^m, que le fond de la cuvette où il s'est déposé s'approfondissait à mesure que les sédiments tendaient à le combler : c'est un dépôt de géosynclinal. En outre, si l'on considère, d'une part, que la direction de ses plis est parallèle au grand axe de la mer actuelle, direction qui concorde avec la distribution dans l'espace de ses affleurements, de l'autre qu'il repose sur le Priabonien, dont les directions de plissement, comme je le montrerai ultérieurement, sont presque orthogonales, il en résulte que ce Flysch s'est déposé sur l'ennoyage local post-priabonien d'une chaîne antérieure.

Nous avons là une première esquisse des directions tectoniques actuelles de la région.

MÉTÉOROLOGIE. — *Sur la répartition des pluies en Afrique occidentale.* Note de M. **Henry Hubert**, présentée par le Prince Bonaparte.

Au point de vue du mécanisme des précipitations, il y a lieu de distinguer en Afrique occidentale les pluies d'orage (de l'Est), les pluies de mousson (du Sud-Ouest) (¹), et accessoirement, quelques pluies d'alizé (au Sénégal) et quelques pluies de relief (Fouta, Atacora).

La distinction entre les deux premières pluies, seules générales dans l'Ouest africain, ne permet pas de se faire une opinion quant à la répartition des précipitations. Il est clair en effet que, pour une époque quelconque, si l'on considère des points situés de part et d'autre et à proximité de la limite commune à chacun des deux types de précipitations, la quantité d'eau tombée est nécessairement égale à celle qui serait fournie par les pluies d'orage seules et que, par suite, cette limite commune ne peut indiquer des différences dans la somme des précipitations. Cela résulte à la fois de ce que les pluies d'orages sont celles qui libèrent le plus facilement la vapeur d'eau atmosphérique et de ce qu'elles prennent naissance au-dessus de la tranche d'atmosphère dans laquelle souffle la mousson, d'où cette double conséquence : 1° que les deux types de pluies ne peuvent être simultanés, mais alternatifs; 2° que les pluies de mousson, du fait qu'elles existent à la place des pluies d'orage, libèrent forcément par rapport à celles-ci une quantité de vapeur d'eau qui, pratiquement, ne peut être ni supérieure (les pluies d'orage étant plus faciles) ni inférieure (les pluies d'orage se produiraient).

Les deux principaux phénomènes à considérer relativement à la répartition des précipitations en Afrique occidentale sont : 1° l'intensité des courants ascendants; 2° le transport d'humidité.

I. L'examen des cartes des pluies mensuelles, établies au moyen des documents que j'ai pu rassembler, montre qu'en général la répartition des précipitations est telle que l'indique la théorie du déplacement de la zone des calmes équatoriaux, avec deux saisons des pluies pour les régions méridionales. Mais cette théorie ne saurait avoir son application ici, puisque la présence de la mousson, qui précède les pluies dans l'intérieur, écarte la possibilité de l'existence d'une zone des calmes. Cependant, il y a nécessairement des courants ascendants, seulement ceux-ci sont toujours obliques (parfois même extrêmement), au moins dans leur partie inférieure, puisqu'ils sont dans le courant de la mousson. Il est évident que leur

(¹) *Comptes rendus*, t. 152, 1911, p. 1881.

intensité et leur verticalité augmentent, et par suite les chances de précipitations, avec la température. Par conséquent, la position de la zone des pluies maximales est forcément en relation avec la zone des températures maximales et elle a des déplacements de même sens aux mêmes époques. Or, comme en dépit de certaines anomalies, la position de cette dernière dépend elle-même du mouvement apparent du Soleil, les choses sont en somme analogues à ce que fait prévoir la théorie du déplacement de la zone des calmes.

II. D'après ce qui précède, la position de la zone des pluies maximales devrait coïncider avec celle des températures maximales, à un léger décalage près. Cela s'observerait sans doute si la quantité de vapeur d'eau libérable était égale partout. Mais comme c'est la mousson qui apporte l'humidité, celle-ci diminue à partir de la côte méridionale à mesure que la latitude augmente. Par conséquent, la zone des pluies maximales, qui coïncide nécessairement avec la côte aux deux époques limites où la zone des températures maximales y passe elle-même (ou est très voisine), va prendre pour tous les autres moments une position intermédiaire, fonction à la fois de l'intensité des courants ascendants et de la quantité d'eau apportée. Ainsi s'explique que, sauf aux deux époques limites, la zone des pluies maximales soit à une latitude beaucoup plus basse que la zone des températures maximales.

Enfin, comme il n'y a pas seulement diminution de la vapeur d'eau du Sud au Nord, mais progression de celle-ci dans le sens SW-NE, qui est celui de la mousson, il en résulte : 1° Que les régions côtières orientées normalement à la direction de la mousson (Guinée à Libéria; delta du Niger) bénéficient d'un surcroît considérable de précipitations, celles-ci n'étant plus du tout, par suite, réparties conformément à la théorie précédente;

2° Que les régions soudanaises, situées sous le vent de la côte guinéenne, bénéficient d'un surcroît de vapeur d'eau, mais celle-ci est utilisée conformément à la théorie précédente de sorte qu'on observe, au milieu de la zone des pluies maximales lorsque celle-ci atteint le Soudan, une zone de pluies encore plus fortes Z (1) qui se relie d'ailleurs à la côte guinéenne.

(1) Il est important de signaler que la progression de cette zone Z a lieu dans le sens Ouest-Est et sa régression dans le sens Est-Ouest. En d'autres termes, son mouvement, complètement indépendant de celui que possède en latitude la zone des pluies maximales, est simplement parallèle à la direction de propagation de la mousson.

Mais la diminution de l'humidité vers l'Est, à laquelle s'ajoute l'influence des orages qui rejettent la pluie dans l'Ouest, fait que cette zone centrale Z est limitée par une courbe fermée à l'Est.

Des considérations théoriques à développer d'autre part établissent encore que la limite nord des régions à deux saisons de pluies est une zone à précipitations constantes pendant plusieurs mois. Cela est confirmé par l'observation. Au nord de cette limite, il ne peut y avoir que des régions à une saison de pluies; mais, par suite de circonstances exceptionnelles dont il est matériellement impossible de donner ici le détail, la zone centrale Z disparaît temporairement en juin. La diminution des précipitations qui en résulte a été interprétée par certains auteurs comme étant l'individualisation de la petite saison sèche des régions méridionales. Il serait facile de démontrer que cette interprétation n'est pas satisfaisante, mais des considérations d'époque et de situation géographique suffisent à l'écarter *a priori*.

BOTANIQUE. — *De l'action morphogénique de la sursalure sur les Bactéries marines*. Note de M. **Henri Coupin**, présentée par M. Gaston Bonnier.

Dans une précédente Note [1], j'ai montré que les Bactéries de l'eau de mer peuvent vivre dans une eau contenant, en chlorure de sodium, de 8 à 16 pour 100 (suivant les espèces), alors que le taux de la salure naturelle n'est que d'environ 2,5 pour 100. Il y avait lieu de compléter ces notions par la question de savoir si, dans cette eau sursalée, les Bactéries (il s'agit ici du genre *Bacillus*) n'éprouvent pas de modifications morphologiques. Des examens microscopiques multipliés m'ont permis de constater que celles-ci sont très fréquentes. Cependant, il est à noter que, dans toutes les cultures faites dans de l'eau, même au taux maximum de NaCl compatible avec la vie des Bactéries, il y a *toujours* (et même en grande quantité) des éléments absolument normaux; mais, *à côté d'eux*, d'autres éléments qui, bien qu'ayant même origine, se conduisent, pour des raisons inconnues, différemment, d'où un mélange parfois très hétérogène qui, d'ailleurs, rappelle, mais amplifié, ce qui se constate dans n'importe quelle culture,

---

[1] *Sur la résistance à la salure des Bactéries marines* (*Comptes rendus*, t. 160, 1915, p. 443).

même dans les milieux les plus normaux, polymorphisme que connaissent bien tous les bactériologistes.

Pour en revenir à la manière particulière dont certains éléments réagissent à la sursalure, on peut les grouper sous huit chefs de file :

1° Les éléments ne subissent pas de modifications morphologiques apparentes, mais leur développement est très lent : c'est ainsi que (le cas est, d'ailleurs, d'une généralité absolue) le trouble général du liquide ensemencé ne commence à être perceptible à la vue qu'au bout de 8 à 10 jours en eau sursalée au maximum, au lieu de 1 à 2 jours en salure normale.

2° Les bâtonnets, au lieu de se séparer, restent unis entre eux en chaînes d'une longueur parfois démesurée et pouvant être formées d'une cinquantaine d'éléments. Ceux-ci sont, alors, tantôt immobiles, tantôt mobiles; dans ce dernier cas, les chaînes avancent d'un mouvement irrégulier, comme si l'on avait affaire à un système articulé où chaque partie agirait pour son propre compte; on a l'impression que chaque élément, quoique uni à son voisin, a une individualité propre et « n'a pu arriver » à s'en séparer.

3° Les bâtonnets, au lieu de garder leur dimension normale, s'allongent sensiblement, de manière à atteindre 4 à 10 fois la longueur normale, tout en restant droits, rectilignes et en ayant perdu leur mobilité.

4° Les bâtonnets se comportent de même, mais restent lentement mobiles, se déplaçant dans le sens de leur longueur.

5° Les bâtonnets s'allongent considérablement, mais sont très irréguliers, présentant des courbures inégales et capricieuses ; ce sont les « formes filamenteuses » qu'on rencontre si fréquemment dans les cultures, mais, ici, beaucoup plus nombreuses et parfois extrêmement longues et tortueuses : elles sont, dans la majorité des cas, immobiles.

6° Des formes filamenteuses, identiques à ce qui vient d'être dit, sont lentement mobiles et progressent, presque toujours, dans la même direction.

7° Les formes filamenteuses sont immobiles, moins allongées, mais plus régulières et affectent la forme en tire-bouchons réguliers que l'on considère comme caractéristique du genre *Spirillum*, alors qu'ici ce sont manifestement des *Bacillus*.

8° Des formes spiralées semblables sont mobiles et avancent, à la fois, par des ondulations latérales d'ensemble et en tournant sur elles-mêmes à la manière d'une vis qu'on ferait pivoter autour de son axe : c'est dire

que ces formes sont rigoureusement identiques aux vrais *Spirillum* et que, si on les rencontrait seules, on les placerait sans hésiter dans ce genre, dont la légitimité est, peut-être, sujet à caution.

En somme, on voit que la sursalure agit surtout sur les *Bacillus* en entravant leur désarticulation, en accroissant leur longueur, en augmentant beaucoup leurs formes filamenteuses et en les transformant parfois en vrais Spirilles (¹). Dans tous les cas, il y a un retard marqué dans le développement, et il n'est pas impossible qu'il y ait, entre ce fait et les modifications morphologiques que je viens de signaler, une certaine relation de cause à effet.

MÉDECINE. — *Sur les blessures de guerre et la cure solaire.* Note (²) de M. **Robert Sorel**, présentée par M. d'Arsonval.

Le premier Congrès de l'Association internationale de Thalassothérapie a eu lieu à Cannes du 15 au 22 avril 1914, sous la présidence d'honneur de S. A. S. le Prince de Monaco et sous la présidence effective du professeur d'Arsonval, Membre de l'Institut.

Une seule question était mise à l'ordre du jour : l'héliothérapie marine. Des rapports déjà publiés ont étudié la cure solaire à tous ses points de vue, physiques, chimiques, météorologiques, biologiques.

Les lecteurs des *Comptes rendus* y verront que c'est une méthode française utilisée pour la première fois par le professeur Poncet, de Lyon, et que les effets de la cure ont leur rendement maximum au bord de la mer. Nulle région n'est donc mieux indiquée pour l'essai de cette méthode physiothérapique que la côte d'Azur.

Étant chirurgien de l'hôpital Alexandra à Monte-Carlo, il était assez naturel que l'un des Secrétaires du Congrès de Cannes songeât à appliquer la cure solaire au traitement des blessures de guerre. Dans cet hôpital, à quelques exceptions près, nous n'avons employé que des agents physiques pour assurer la cure de nos malades : asepsie simple, stérilisation des objets de pansements, instruments, gants de caoutchouc, à l'autoclave à 120°;

(¹) A noter aussi, dans bien des cas, mais pas dans tous, l'augmentation du nombre et des dimensions des vacuoles.

(²) Séance du 26 avril 1915.

aucun antiseptique de la peau, ni du chirugien, ni du patient, mais air chaud et cure solaire.

Ce sont les résultats obtenus que j'ai l'honneur de présenter dans cette Note. Des plaies infectées avec sphacèle ou lymphangite se sont rapidement cicatrisées.

Nous donnons ci-dessous la liste des malades où cette méthode a été uniquement employée et nous communiquons des photographies des larges plaies contuses et infectées guéries complètement par le soleil.

Un chirurgien doit plus compter sur l'aptitude héritée de l'organisme à lutter contre l'infection (phagocytose, anti-corps, etc.), ou sur les moyens physiques pour mettre cet organisme dans les meilleures conditions de lutte, que sur les moyens chimiques qui ajoutent trop souvent leurs intoxications aux toxines microbiennes ([1]).

MALADES SOIGNÉS PAR LES BAINS DE SOLEIL.

Edmond Francoul....	14 septembre-21 octobre. Bargemont (Var). Plaie à l'extrémité de l'annulaire gauche.
Marius Eckel........	14 septembre-8 décembre. Dagonville (Meuse). Plaie par balle au coude gauche. Lymphangite.
François Auda.......	14 septembre-14 novembre. Sospel (A.-M.). Plaie contuse de toute l'éminence thénar.
Jean Frippet.........	14 septembre-2 novembre. Bonnieux (Vaucluse). Blessure à l'épaule gauche.
Marius Nalin........	14 septembre-8 octobre. Marseille. Phlyctène au médium droit. Balle en séton au-dessus du genou droit.
Louis Couchot.......	14 septembre-10 novembre. Paris. Plaie infectée par balle au bras droit, avec lymphangite.
Marcellin Bellon.....	14 septembre-13 octobre. Vernègues (B.-du-R.). Balle dans la main gauche, plaie infectée.
Auguste Page........	14 septembre-2 novembre. Reims. Phalangette annulaire gauche emportée.
Lucien Dumas.......	14 septembre-28 septembre. Robillac (Gard). Plaie infectée, extrémité de l'index gauche.
Ernest Gilquin.......	14 septembre. Nettancourt (Meuse). Pied gauche traversé par une balle.

([1]) ROBERT SOREL, *Étude sur la désinfection des mains* (séance du 6 décembre 1912 de la Société de Médecine et de Climatologie de Nice; *Comptes rendus du Congrès de Chirurgie*, séance du 7 octobre 1913, p. 226; *Journal des Praticiens*, 8 novembre 1913, p. 727).

Louis Boulbet......	25 décembre. L'Espinasse-par-Belasta (Ariège). Grande et profonde plaie de l'épaule droite par éclat d'obus; plaie du cuir chevelu.
Léon Piccon.........	30 septembre-11 février. Cannes (Alpes-Maritimes). Fracture des trois métatarsiens médians du pied droit.
Louis Piepers........	30 septembre-22 janvier. Armentières. Plaie en séton par balle à la jambe droite (mollet).
Trouguet-Chala.......	30 septembre-12 janvier. Castex-Miollans (Gers). Plaie au pied droit. Lymphangite.
Jean-Marie Bira......	14 septembre-12 janvier. Asson (Basses-Pyrénées). Éclat d'obus au genou gauche.
Joseph Molinier......	30 septembre-5 décembre. Vias (Hérault). Plaie au pied gauche par balle.

MÉDECINE. — *Localisation radioscopique des corps étrangers par la méthode de Hirtz.* Note (¹) de M. **Maxime Ménard**, présentée par M. d'Arsonval.

La localisation des projectiles par la méthode de Hirtz n'a été effectuée jusqu'à ce jour qu'en utilisant la radiographie.

D'après les renseignements qui nous ont été donnés de nombreuses installations radiologiques ne disposent pas de plaques sensibles et, par suite, ne peuvent pas faire bénéficier les blessés de la précision de la méthode de Hirtz.

Nous avons recherché si, dans certains cas, il ne serait pas possible de remplacer la plaque radiographique par l'écran fluorescent. Nos essais ont été couronnés de succès et nous croyons utile de faire connaître ces résultats.

Le matériel utile est le même que celui des opérations radiologiques ordinaires. La table d'examen doit être transparente aux rayons X. Le pied support d'ampoule doit être facilement placé sous la table et l'écran fluorescent de dimensions convenables 30×40 ou 40×50.

La disposition du matériel et du patient par rapport à la table d'examen est la suivante :

1° L'ampoule est placée sous la table;

2° Le patient est couché sur la table;

(¹) Séance du 26 avril 1915.

3° L'écran fluorescent est placé au-dessus du patient, dans un plan parallèle à celui de la table. Il n'est pas utile de le mettre en contact immédiat avec la peau du patient. Pour la localisation radiographique des corps étrangers par la méthode de Hirtz, on fait deux radiographies sur la même plaque en déplaçant l'ampoule d'une quantité connue.

Il en est de même pour la localisation radioscopique.

Les trusquins ayant été convenablement placés sur la peau du blessé, l'écran est placé dans un plan parallèle à celui de la table d'examen. On mesure la distance du tube à l'écran et l'on inscrit sur le verre protecteur de ce dernier le point choisi pour le passage du rayon normal.

On fait un premier examen radioscopique et l'on marque sur le verre protecteur de l'écran la silhouette de chacune des pointes ou des sphères de plomb des trusquins ainsi que celle du corps étranger. L'ampoule étant déplacée d'une quantité connue, on marque sur le verre protecteur de l'écran la silhouette de chaque trusquin et celle du corps étranger.

L'opération radioscopique est ainsi terminée et l'on possède alors tous les éléments utiles à l'exécution de l'épure qui permet le réglage du compas.

Nous avons localisé par le procédé radioscopique une aiguille située dans le bras. L'opération, faite dans le service de M. Schwartz, chirurgien de l'hôpital Cochin, en suivant les indications du compas, a amené, en quelques instants, la découverte et l'extraction du fragment de l'aiguille situé à 2^{cm} de la peau. Nous avons obtenu le même résultat pour un éclat d'obus mesurant 5^{mm} sur 3^{mm} et situé à 6^{cm} de profondeur des téguments de la face interne de la cuisse.

Nous avons localisé des corps étrangers de faible dimension, ceux pour lesquels la localisation doit être rigoureusement précise et nous sommes certains que, dans les stations radiologiques où l'on ne peut pas avoir de plaques, l'écran fluorescent peut remplacer la plaque radiographique sans nuire à la précision de la méthode.

Toutefois, dans les postes radiologiques munis de plaques, la méthode radiographique doit être préférée à la méthode radioscopique à cause des brûlures auxquelles l'opérateur est exposé.

De ce qui précède et des résultats obtenus par nous avec la méthode de Hirtz, notre conclusion est que :

1° Cette méthode est désormais accessible à tous les radiologues puisqu'elle utilise la radioscopie et la radiographie ;

2° Elle est supérieure aux autres méthodes, car, durant toute l'opération, elle guide le chirurgien dans la direction du corps étranger et donne sa situation exacte dans la profondeur des tissus. A ce dernier point de vue, nous avons apporté quelques légers perfectionnements à la sonde de profondeur du compas de Hirtz. A l'extrémité de cette dernière, nous avons ajouté une aiguille capable de pénétrer dans les tissus et d'entrer en contact avec le corps étranger. Un dispositif spécial permet de libérer l'aiguille de la sonde de profondeur et le chirurgien, guidé alors par l'aiguille, peut facilement atteindre le corps étranger. Ce dispositif a pour but d'éviter les applications répétées du compas au cours d'une opération. Dans certaines régions, par suite de la présence de vaisseaux ou d'organes importants, on ne peut utiliser l'aiguille; on procède alors suivant la méthode habituelle.

Enfin, il est avantageux, dans certains cas, de pouvoir remplacer une ou deux des branches horizontales du compas actuel par une ou deux branches plus courtes ou plus longues. Ce ne sont là que des modifications peu importantes destinées à faciliter l'application du compas sur n'importe quelle région de l'organisme.

M. **Marcel Baudouin** adresse une Note intitulée : *Découverte d'une pierre à sculptures de type néolithique sous les dunes anciennes des marais de Vendée.*

A 16 heures, l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à 16 heures et demie.

G. D.